බහුපද ශ්‍රිත / ශේෂ ප්‍රමේයය/සාධක ප්‍රමේයය

Polynomials / Remainder Theorem / Factor Theorem

Ruwan Darshana
B.Sc. (Hons)

01. සංශ්ලේෂණ බෙදීම මගින් ශේෂයන් සොයන්න. [නව නිර්දේශයට අයත් නොවේ.]

(i) $2x^3 + 5x^2 - 3x + 13 \div (x - 1)$
(ii) $x^4 + 7x^3 + 2 \div (x + 1)$
(iii) $5x^3 + 8x^2 + 9 \div (x - 2)$
(iv) $x^3 + 2x^2 + 1 \div (x + 3)$
(v) $20x^3 + 40x^2 + 50 \div (2x - 1)$
(vi) $8x^3 + 24x + 7 \div (2x + 1)$
(vii) $81x^3 + 27x^2 + 60x + 2 \div (3x - 1)$

02. ශේෂ ප්‍රමේයය මගින් ශේෂය සොයන්න.

(i) $x^3 + 5x^2 + 12$; $(x - 1)$ න්
(ii) $x^4 + 9x^2 + 10x + 5$; $(x + 1)$ න්
(iii) $x^5 + 2x^3 + 7x + 5$; $(x - 2)$ න්
(iv) $2x^3 - 4x + 1$; $(x - 3)$ න්
(v) $16x^2 + 20x + 1$; $(2x - 1)$ න්
(vi) $100x^2 + 40x + 3$; $(4x - 1)$ න්
(vii) $f(x)$; $(x - 2)$ න්
(viii) $f(x)$; $(x - \alpha)$ න්
(ix) $g(x)$; $(x + 3)$ න්
(x) $R(x)$; $(x + 1)$ න්

03. (i) $2x^3 + 5x^2 + kx + 12$; $(x + 2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 20 ක් නම්, k සොයන්න.

(ii) $x^3 + 5x^2 + ax + b$; $(x - 1)$, $(x - 2)$ න් බෙදූ විට ශේෂයන් 9, 29 වේ. a, b සොයන්න.

(iii) $x^3 + ax^2 + bx + c$ ප්‍රකාශනය $(x - 1)$, $(x + 1)$, $(x - 2)$ න් බෙදූ විට ශේෂයන් පිළිවෙලින් 0, −2, 3 වේ. a, b, c සොයන්න.

(iv) $(x + 1)$ න් $2x^3 + kx^2 - 5x + 6$ බෙදූ විට ශේෂය 5 වන සේ k සොයන්න.

(v) a, b නියත ද, $b \neq 0$ ද නම්, $f(x) = x^2 + ax + b$ වේ. $f(x)$; $(x - b)$ වලින් බෙදූ විට ශේෂයත්, $(x - 2b)$ වලින් බෙදූ විට ශේෂයත් සමාන නම්, b ට තිබිය හැකි අගයන් සොයන්න.

04. (i) $5x^3 + 9x^2 + kx + 12$ හි $(x - 2)$ සාධකයක් නම් k සොයන්න.

(ii) $x^2 - kx - (k^2 - 1)$ හි $(x + 2)$ සාධකයක් වන සේ k සොයන්න.

(iii) $x - 3$ යනු $x^2 - (2a + 1)x + 2b$ හිත්, $x^2 - (b + 2)x + 5a$ හිත් පොදු සාධකයක් නම් a සහ b සොයන්න.

(iv) $(x - 2)$ යනු $x^4 + 5x^2 + 7$ ප්‍රකාශනයේ සාධකයක් නොවන බව පෙන්වන්න.

(v) $(x - a - b)$ යනු $x^3 - 3abx - (a^3 + b^3)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.

05. (i) $f(x)$; $(x - 2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 20 ක් වේ. $g(x)$; $4f(x) + 20$ වේ.
$g(x)$; $(x - 2)$ න් බෙදූවිට ශේෂය සොයන්න.

(ii) $f(x)$, $(x - 1)$, $(x + 1)$, $(x - 5)$ න් බෙදූ විට ශේෂයන් පිළිවෙලින් 10, −3, −8 වේ.
$g(x) = xf(x) + 5$ ද, $h(x) = x^2 f(x) + 9x + 1$ ද $R(x) = 2f(x) - 10$ ද වේ.
$g(x)$; $(x - 1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

$h(x)$; $(x+1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
$R(x)$; $(x-5)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(iii) $(x-1)$ යනු $f(x)$ වල $g(x)$ වල සාධකයක් වේ. $h(x)$; $(x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 5 ක් වේ. $R(x) = 2f(x) + 3g(x) + 4h(x)$ වේ. $R(x)$; $(x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(iv) $f(x)$; $(x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 30 කි. $g(x) = xf(x) + 5$ වේ. $g(x)$; $(x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

06. $P(x) = ax^2 + bx + c$ වේ. $P(x)$, $(x+1)$, $(x+2)$, $(x+3)$ න් බෙදූ විට ශේෂයන් පිළිවෙලින් 12, 12, 0 වේ.
(i) a, b, c සොයන්න.
(ii) $P(x)$ රේඛීය සාධකවලට වෙන් කරන්න.
(iii) $P(x) = 0$ විසඳන්න.
(iv) $P(x)$ ධන වන x වල අගය පරාසය සොයන්න.

07. $f(x) = xp(x) + 1$ වේ. $P(x)$ බහු පදය $(x-1)$, $(x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂයන් $-1, \frac{-1}{2}$ වේ.
$(x-1)$, $(x-2)$ යනු $f(x)$ වල සාධක බව පෙන්වන්න.

08. (i) $(x-2)$ යනු $x^3 - 5x^2 + 4x + 4$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.
(ii) $(x+1)$ යනු $5x^7 + 6x^4 + 8x + 7$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.
(iii) $(x-1)$ යනු $x^2 + 4x - 5$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.
(iv) $(x-a)$ යනු $2x^3 - 5ax^2 + 7a^2x - 4a^3$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.
(v) $f(x) = 3x^3 + 9ax^2 + 20a^2x + 14a^3$ වේ. $(x+a)$ යනු $f(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.

09. (i) $x^4 + 5x^3 + 1$ හි $(x-1)$ සාධකයක් නොවන බව පෙන්වන්න.
(ii) $7x^3 + 6x^2 + 2$ හි $(x+2)$ සාධකයක් නොවන බව පෙන්වන්න.
(iii) $f(x) = x^2 + 2x + 30$ වේ. a නියතයක් වන විට, $(x-a)$ යනු $f(x)$ හි සාධකයක් නොවන බව පෙන්වන්න.

10. (i) $x^3 + 5x^2 + 7x + 3$ හි $(x+1)$ සාධකයක් බව පෙන්වා, ඉතිරි සාධක සොයන්න.
(ii) $(x-1)$ යනු $x^3 + 4x^2 - x - 4$ හි සාධකයක් බව පෙන්වා, එනයින් ප්‍රකාශනය ඒකජ සාධකවලට වෙන් කරන්න.
(iii) $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$ වේ. $(x+1)$ සාධකයක් බව පෙන්වා, ඉතිරි සාධක සොයන්න.
$f(x) = 0$ විසඳන්න.
(iv) $g(x) = 2x^3 - x^2 - 18x + 9$ වේ. $(2x-1)$ යනු $g(x)$ වල සාධකයක් බව පෙන්වා, ඉතිරි සාධක සොයන්න. $g(x) = 0$ විසඳන්න.

11. (i) $(x-a-b)$ යනු $x^3 - 3abx - (a^3 + b^3)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වා, ඉතිරි සාධක සොයන්න.
$x^3 - 6x - 9 = 0$ විසඳන්න.

(ii) $(x-a-b-c)$ යනු $(x-a)(x-b)(x-c) - (a+b)(b+c)(c+a)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න. $(x-1)(x-2)(x+4) - 18 = 0$ විසඳන්න.

12. (a) සාධක ප්‍රමේයය ලියන්න.
(b) සාධක ප්‍රමේයයේ විලෝමය ලියන්න.
(c) පහත ඒවා සාධක වෙන් කරන්න.
(i) $x^3 + 5x^2 + 2x - 8$
(ii) $x^3 + 4x^2 + 7x + 4$
(iii) $2x^3 + 7x^2 - 5$
(iv) $x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 1$
(v) $x^3 - 2x - 4$
(vi) $x^3 - 7x - 6$
(vii) $x^3 - (5+a)x^2 + (6+5a)x - 6a$
(viii) $x^4 - 9ax^3 + 5a^2x^2 - 6a^3x + 21a^4$

13. ශේෂ ප්‍රමේයයේ බෙදුම් ඇල්ගොරිතමය මගින් ශේෂය සොයන්න.
(i) $x^4 + 5x^3 + 7x + 2$; $(x^2 - 4)$ න්
(ii) $x^5 - 6x^3 + 2$; $(x^2 - x)$ න්
(iii) $x^3 + 8x^2 + 6x - 1$; $(x^2 + 2x)$ න්
(iv) $x^3 + 5x + 2$; $(x^2 - a^2)$ න්
(v) $x^4 + 7x^2 + 2x - 1$; $x^2 - x - 2$ න්.

14. (i) $x^4 + 3x^2 + Px + Q$; $(x^2 - 1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය $6x - 5$ නම්, P, Q සොයන්න.
(ii) $x^4 + 6x^3 + \lambda x^2 + \mu x + \gamma$ ප්‍රකාශනයේ $x^3 - x$ සාධකයක් නම්, λ, μ, γ සොයන්න.

15. ශේෂ ප්‍රමේයය සම්බන්ධ ප්‍රකාශනය මගින් බෙදා ශේෂය සොයන්න. (බෙදුම් ඇල්ගොරිතමය භාවිතා කරන්න.)
(i) $f(x)$ බහු පදය $(x^2 - a^2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය,
$\frac{1}{2a}[f(a) - f(-a)]x + \frac{1}{2}[f(a) + f(-a)]$ බව පෙන්වන්න.
(ii) $g(x)$ යනු 2 වෙනි හෝ ඊට වැඩි මාත්‍රයක බහුපද ශ්‍රිතයක් නම්, $g(x)$; $(x-a)(x-b)$ යෙන් බෙදූ විට ශේෂය $\left[\frac{g(a) - g(b)}{a-b}\right]x + \left[\frac{ag(b) - bg(a)}{a-b}\right]$ බව පෙන්වන්න.

16. (i) $P(x)$ නම් බහු පදය $(x-a)(x-b)$ යෙන් බෙදූ විට ශේෂය $A(x-a) + B(x-b)$ ආකාර වේ. A, B සොයන්න.
(ii) $f(x)$ නම් බහුපදය $(x+1)(x+2)(x+3)$ න් බෙදූ විට ශේෂය,
$a(x+2)(x+3) + b(x+3)(x+1) + c(x+1)(x+2)$ වේ. $f(-1)$, $f(-2)$, $f(-3)$ ඇසුරෙන් a, b, c සොයන්න.

17. (i) $x^5 + kx^2 + k$ ප්‍රකාශනය $(x-1)(x-2)(x-3)$ න් බෙදූ විට ශේෂයේ x^2 පද නොමැති නම් k සොයන්න.

(ii) $x^3 + kx^2 + 7k$ ප්‍රකාශනය $(x+1)(x+2)$ න් බෙදූ විට ශේෂයේ නියත පදය නොමැති නම් k සොයන්න.

18. (i) $P(x)$ නම් බහු පදය $(x-a)(x-b)$ ගෙන් බෙදූ විට ශේෂය $a, b, P(a), P(b)$ ඇසුරෙන් සොයන්න. එනයින් $x^5 - \lambda x^2 + 1$; $(x-1)(x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂයේ නියත පදය නොමැති නම්, λ සොයන්න.

(ii) $f(x)$ නම් බහුපද ශ්‍රිතය $(x-1)(x-2)(x-3)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය, $a(x-2)(x-3) + b(x-3)(x-1) + c(x-1)(x-2)$ වේ. a, b, c හි අගයන් $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ මගින් සොයන්න.
තවද, $x^3 + kx^2$, $(x-1)(x-2)(x-3)$ න් බෙදූ විට ශේෂයේ x^2 පදය නොමැති නම්, k හි අගය අපෝහනය කරන්න.

19. (i) $x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 7x + 8$; (x^2+2) න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(ii) $x^6 - 4x^3 + x^2 + x$; (x^2+1) න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(iii) $x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 1$; (x^2-5) න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(iv) $16x^3 + 8x^2 - 12x + 9$; $(2x^2+1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(v) $27x^3 + 81x^2 + 4x + 1$; $(3x^2-1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(vi) $Px^3 + Qx^2 + Rx + S$; (x^2+K^2) න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(vii) $2x^3 + bx^2 + cx + 7$; (x^2+k^2) න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

20. (i) $7x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + 6$; (x^2+1) න් බෙදූ විට ශේෂය $5x-2$ නම්, a, b සොයන්න.
(ii) $5x^4 - 2x^3 + Px^2 + Qx + 9$ ප්‍රකාශනයේ (x^2-2) සාධකයක් නම්, P, Q සොයන්න.
(iii) $\lambda x^3 + 3x^2 - 5x + \mu$ ප්‍රකාශනයේ $x^2 + k^2$ සාධකයක් නම්, $\lambda\mu = -15$ බව පෙන්වන්න.

21. (i) $x^5 + 7x^4 - 6x^3 - 2x + 1$ ප්‍රකාශනය (x^3+2) න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(ii) $7x^6 + 4x^5 - 5x^2 + x + 9$ ප්‍රකාශනය (x^3-1) න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(iii) (x^3+1) යනු $x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 - 7$ හි සාධකයක් නම්, a, b, c සොයන්න.

22. (i) $5x^3 + 7x^2 - 4x + 1$; $x^2 - 2x + 1$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(ii) $x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 8$; $x^2 - x + 1$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(iii) $2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - ax + b$ ප්‍රකාශනය $x^2 + x + 1$ න් බෙදේ නම් a, b සොයන්න.

23. (i) ශේෂ ප්‍රමේය භාවිත, භාවිත නොකිරීමෙන්, $(x-1)^2$ යනු $x^2 + x^2 - 5x + 3$ සාධකයක් බව පෙන්වන්න.
(ii) ශේෂ ප්‍රමේය භාවිත, භාවිත නොකිරීමෙන් $(x+1)^2$ යනු $3x^3 + 7x^2 + 5x + 1$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.

24. (i) $x^3 + 3x^2 + 7x + 5$; $(x-1)$ හි ගුණාකාර ලෙස ලියන්න.
(ii) $x^3 + 8x^2 + 10$; $(x+1)$ හි ගුණාකාර ලෙස ලියන්න.
(iii) $x^4 + 3x + 5$; $(x-2)$ හි ගුණාකාර ලෙස ලියන්න.

25. පහත සමීකරණ විසඳන්න.
(i) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$
(ii) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 11 = 0$
(iii) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$
(iv) $5x^4 - 11x^3 + 16x^2 - 11x + 5 = 0$

26. පහත සමීකරණ විසඳන්න.
(i) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$
(ii) $x^3 + 7x^2 + 6x = 0$
(iii) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
(iv) $4x^3 - 3x + 1 = 0$
(v) $x^3 + 5x^2 + 9x + 5 = 0$

27. (i) $9x^4 - 6x^3 + 13x^2 + lx + m$ පරිපූර්ණ වර්ගයක් නම්, l හා m සොයන්න.
(ii) $9x^6 - 24x^5 + 34x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 12x + 4$ ප්‍රකාශනයේ වර්ගමූලය සොයන්න.
(iii) $16x^8 - 16x^6 + 8x^5 - 36x^4 - 4x^3 + 21x^2 - 10x + 25$ වර්ගමූලය සොයන්න.

28. විසඳන්න.
(i) $3^{2x+1} + 3^2 = 3^{x+3} + 3^x$
(ii) $(3 - 2\sqrt{2})^{x^2-2} + (3 + 2\sqrt{2})^{x^2-2} - 6 = 0$
(iii) $4^x - 5 \times 2^x + 4 = 0$
(iv) $4^x + 6^x = 9^x$

29. විසඳන්න.
(i) $\sqrt{5x^2 - 6x + 8} - \sqrt{5x^2 - 6x - 7} = 1$
(ii) $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x-2)(x-3) = 1$
(iii) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x+21} = \sqrt{6x+40}$
(iv) $x(x+2)(x^2-1) = -1$
(v) $3^{2x^2-7x+7} = 4$

30. (i) $x^4 + 5x^3 + 2x + 1$; $(x-1)^2$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(ii) $3x^5 + 7x^4 - 10x^3 + 2$; $(x+1)^2$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(iii) $x^4 - 10x^3 + 7x^2 + 8$; $(x-2)^2$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(iv) $x^4 + 6x^3 + ax + b$ ප්‍රකාශනය $(x-1)^2$ න් බෙදූ විට ශේෂය $5x + 7$ නම් a, b සොයන්න.

31. පහත ඒවා රේඛීය සාධකවලට වෙන් කරන්න.
(i) $x^2 + xy - 6y^2 + 4x + 7y + 3$
(ii) $x^2 + 2xy - 8y^2 + 4x - 2y + 3$
(iii) $3x^2 - 5xy - 2y^2 - 2x - 3y - 1$
(iv) $2x^2 - 9xy - 5y^2 + 22x + 20$
(v) $12x^2 + 7xy - 12y^2 + 50y - 48$

32. පහත ඒවා රේඛීය සාධක දෙකකට වෙන්කළ හැකි වන සේ k සොයන්න. (k - නියතයකි.)
(i) $x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x - 5y + k$
(ii) $5x^2 + 13xy - 6y^2 - 7x + 13y + k$
(iii) $2x^2 + kxy + 3y^2 - 5y - 2$
(iv) $3x^2 + kxy + 2y^2 - 2x + y - 1$
(v) $2x^2 - xy - y^2 - kx + 6y - 5$

33. සාධක වෙන් කරන්න.

(i) $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$

(ii) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

(iii) $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$

(iv) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

(v) $x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)$

(vi) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

(vii) $x^3+y^3+z^3-3xyz$

(viii) $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$

(ix) $(\alpha+\beta+\gamma)-\alpha^3-\beta^3-\gamma^3$

(x) $(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5$

මිශ්‍ර ගැටළු

34. x යනු $f(x)$ නමැති බහුපද ශ්‍රිතයක සාධකයක් වේ.
$f(x)-f(x-1)=3x^2+5x$ ලෙස අර්ථ දක්වා ඇත්නම්, මෙම අර්ථ දැක්වීම භාවිතයෙන් $(x+1)$, $f(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.
තවද $f(x)$, $(x+2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය -8 වේ. $(x-1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න. එනයින් $f(x)$ නිර්ණය කරන්න.

35. x^3+Ax^2+Bx+C ප්‍රකාශනයේ (x^2+2) සාධකයක් වන අතර, $(x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 6 වේ. A, B, C සොයන්න.

36. $f(x)$ යනු 3 වෙනි මාත්‍රයේ බහු පදයකි. එය $(3x^2+1)$ න් බෙදූ විට ශේෂයක් ඉතිරි නොවේ. බහුපදය $(x-1)^2$ න් බෙදූ විට $16x-12$ ක ශේෂයක් ඉතිරි වේ. $f(x)$ සොයන්න.

37. $f(x)$ බහුපදය (x^2-a^2) න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න. එනයින් $f(x)=x^5+kx^2+2$ නම්, $f(x)$; (x^2-1) න් බෙදූ විට ශේෂයේ නියත පද අඩංගු නොවේ නම්, k හි අගය සොයන්න.

38. (i) $f(x)=2x^3-x^2-2x+k$ වේ. මෙහි k යනු නිශ්ශූන්‍ය නිඛිලයකි. $(x-k)$ යනු $f(x)$ හි සාධකයක් නම්, k හි අගය සොයන්න.
(ii) k හි මෙම අගය සඳහා $f(x)$ ඒකජ සාධක 2 ක ගුණිතයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න.
(iii) $f(x)=(x-a)(2x+1)(x-1)+bx+c$ වන පරිදි a, b, c වල අගයන් සොයන්න.

39. $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ ශ්‍රිතය (x^2+2) න් බෙදූ විට ශේෂය, $(d-2b)x+(4a-2c+e)$ බව පෙන්වන්න.

40. $f(x)$ බහුපදය $(x-a)(x-b)(x-c)$ ගෙන් බෙදූ විට ශේෂය, $A(x-b)(x-c)+B(x-c)+C$ ආකාරයට ලැබෙන බව ශේෂ ප්‍රමේයය නැවත නැවත යෙදීමෙන් පෙන්වන්න.

41. $3x^2-5xy+2y^2+\lambda x+3y-2$ ප්‍රකාශනය රේඛීය සාධක දෙකක ගුණිතයක් වීම සඳහා λ ට තිබිය හැකි අගයන් සොයන්න. λ හි මෙම අගයන් සඳහා රේඛීය සාධක ලියා දක්වන්න.

42. p, r ශුන්‍ය නොවන q තාත්ත්වික නියත විට, $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ සහ $g(x)=x^3+rx^2+qx+p$ යන ඝනජ බහු පද 2 ට පොදු වර්ගජ සාධකයක් තිබීමට අවශ්‍යතාවය, $p=-r$ හෝ $p=-1$ විය යුතු බව පෙන්වන්න. එනයින්, $x^6-9x^4-x^2+9=0$ සහ $9+x^2-9x^4-x^6=0$ සමීකරණ විසඳන්න.

43. $ax^3+bx^2+cx+d=0$ හි මූලයක් α වේ. $ax^3+2bx^2+4cx+8d=0$ හි 2α මූලයක් බව පෙන්වන්න. එනයින් $x^3-112x+384=0$ හි මූල සොයන්න.

44. $ax^4-6x^3+bx^2-cx+28$ බහුපදය $(x-2)^2$ න් නිශ්ශේෂව බෙදේ. $(x+8)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 36 වේ. එම අගයන් ගන්නා විට බහුපදය $(x-1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

45. $(5+2\sqrt{6})^{x^2-3}+(5-2\sqrt{6})^{x^2-3}=10$ විසඳන්න.

46. $6x^4-25x^3+12x^2+25x+6=0$ විසඳන්න.

47. $f(x)=x^4-10x^2+p$ හි (x^2-1) සාධකයක් නම්, p හි අගය සොයන්න. p හි එම අගයට අනුරූප $f(x)$ හි සාධක සියල්ල සොයන්න. එනයින් $2x^8-20x^4+18=0$ හි විසඳුම් සොයන්න.

48. $f(x)$ ශ්‍රිතයට පුනරාවර්තන සාධකයක් ඇත්නම්, එම සාධකය $f'(x)$ වල සාධකයක් බව පෙන්වන්න. x^3-5x^2+7, $(x-1)^2$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

49. $f(x,y)=6x^2+axy+6y^2-10y-24$ බහුපදය රේඛීය සාධක 2 කට වෙන් කිරීම සඳහා a සොයන්න.

50. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ සාධක වෙන් කරන්න.

51. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ හි සාධක සොයන්න.

52. $[x-(P+Q)]$ යනු $x^3-3PQx-(P^3+Q^3)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න. එනයින් $x^3-6x-6=0$ හි තාත්ත්වික මූලයක් සොයන්න.

53. බහුපද ප්‍රකාශන පිළිබඳ සාධක ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.
$f(x)=2x^3-x^2-5x+3$ වේ. මෙම බහුපදය $(x+1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 5 ක් වේ.
එනයින් $f(x)-5$ හි සාධකයක් අපෝහනය කරන්න. $f(x)-5$ බහුපදය ඒකජ සාධකවල ගුණිතයක් ලෙස ලියන්න.

54. $2x^3+3x^2+ax-60$ බහුපදයේ $(x+2)$ සාධකයකි. a හි අගය සොයා, බහුපදය ඒකජ සාධක 3 ක ගුණිතයක් ලෙස ලියා දක්වන්න. බහුපදය ධන නොවන්නා වූ x හි පරාසය ලියන්න.

55. $f(x)$ ඒකජ ශ්‍රිතය $(x-2)$, $(x-1)$, $(2x+1)$ මඟින් බෙදූ විට ශේෂ පිළිවෙලින් $-5, -6, 0$ වේ. $g(x)$ යනු පස්වෙනි මාත්‍රයේ ශ්‍රිතයක් විට $f(x)$ යනු $g(x)$ හි සාධකයක් වේ. $g(x)$ ට පුනරාවර්තන සාධක ඇත. $(x-2)^2$ මඟින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $-3(x+13)$ නම්, $g(x)$ සොයන්න.

56. $f(x)$ යනු $x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ බහුපද ශ්‍රිතයක් වන විට,
(i) $(x-1)$ හෝ $(x+1)$; $f(x)$ හි සාධකයක් නොවන බව පෙන්වන්න.
(ii) $f(x)$ යන්න (x^2-1) මඟින් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.
(iii) $f(x)$ යනු x^2+1 මඟින් බෙදූ විට ශේෂය 2 වන බව පෙන්වා, ඉන්පසු $f(x) - 2$ හි ඒකජ සාධකයක් සොයන්න.

57. $x + \frac{1}{x} = t$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ හි මූල සොයන්න.

58. (i) $x^2 + 2$ යනු $x^4 - 6x^2 + p$ හි සාධකයකි. p නියතය සොයන්න. එවිට $x^4 - 6x^2 + p$ හි සාධක සොයන්න.
(ii) $x^3 - ax^2 + b$ සහ $x^4 - ax^3 + bx^2 + 4$ යන බහු පද දෙකටම පොදු සාධකයක් $(x+1)$ වේ. a සහ b නියත සොයන්න.

59. $ax^3 + bx^2 + cx + d$, $x^2 + k^2$ න් ඉතිරි නැතිව බෙදෙයි නම්, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ බව පෙන්වන්න.

60. P(x) යනු ඝනජ බහුපදයක් ද, $x^2 + x + 1$ මඟින් P(x) බෙදූ විට ශේෂය $(2x+3)$ ද, $x(x+3)$ මඟින් P(x) බෙදූ විට ශේෂය $5(x+1)$ ද වේ. P(x) සොයන්න.

61. q ඔත්තේ නම්, $(x^q + 1)$ යනු $(x^{3q} + 1)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න. එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $x^{21} + 1$ හි සාධක තුනක් $(x+1)$, $(x^2 - x + 1)$, $(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$ බව පෙන්වන්න.

62. $(x^3 + px + \gamma)$ සහ $(3x^2 + p)$ යන බහු පද දෙකටම පොදු ඒකජ සාධකයක් ඇත්නම්
$$\frac{p^3}{27} + \frac{r^2}{4} = 0$$ බව පෙන්වන්න.

63. (i) $4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - 24x + 16$ බහුපදය දෙවෙනි මාත්‍රයේ බහුපදයක පරිපූර්ණ වර්ගයක් බව පෙන්වන්න.
(ii) $x^4 - ax^3 - bx^2 - x + 1$ යන දෙවැනි මාත්‍රයේ බහු පදයක පරිපූර්ණ වර්ගයක් නම්,
$a = c$ සහ $b = \frac{a^2}{4} + 2$ බව පෙන්වන්න.

64. (i) $x - p$ යන්න $4x^3 - (3p+2)x^2 - (p^2-1)x + 3$ හි සාධකයක් වන p හි අගය සොයන්න. p ට අදාලව ප්‍රකාශනයේ ඉතිරි සාධක ද සොයන්න.
(ii) $a^3 + b^3 + c^3 + kabc$ යන්න $a + b + c$ මඟින් බෙදේ නම්, k හි අගය සොයන්න.

(iii) $f(x) = ax^2 + bx + c$ යන්න $x-2, x+1, x+3$ න් බෙදූ විට ශේෂය 1, 2 හා −4 වේ. a, b, c හි අගයන් සොයා $f(x) = 0$ විසඳන්න.
(iv) $(x-k)^2$ යන්න $x^3 + 3px + q$ හි සාධකයක් නම්, $4p^3 + q^2 = 0$ බව පෙන්වන්න.

65. $(x + b + c)$ යනු $x^3(b-c) - x(b^3 - c^3) + b^3c - bc^3$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න. එහි ඉතිරි සාධක සොයන්න.

66. $f(x)$ යනු x හි 4 වන මාත්‍රයේ බහු පදයකි. $f(0) = 12$ වේ. $(x-2)$ යනු $f(x)$ හි දෙවරක් පුනරාවර්තන සාධකයක් වේ. $f(x)$ යන්න (x^2+1) න් බෙදූ විට ශේෂය $6 - 8x$ වේ. $f(x)$ සොයන්න.

67. $g(x)$ 4 වෙනි මාත්‍රයේ බහුපද ප්‍රකාශනයක් වේ. එය (x^2+1) න් සම්පූර්ණ බෙදේ. $g(x)$, $(x-1)^2(x+1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය $-10x + 6$ නම්, $f(x)$ සොයන්න.

68. $f(x) = x^4 + ax^3 + bx + c$ වේ. $f(x)$ යන්න $(x-1)(x+1)(x-2)$ න් සම්පූර්ණ බෙදේ නම්, a, b, c නියත සොයා, ඉතිරි සාධකය ද සොයාගන්න. $2f(x+1) = x^2 + x - 2$ සමීකරණය ද විසඳන්න.

69. $2x^3 + 3x^2 + cx - 60$ බහුපදයේ $(x+2)$ සාධකයකි. c හි අගය සොයා, බහුපදය ඒකජ සාධක තුනක ගුණිතයක් ලෙස ලියා දක්වන්න. බහු පදය ධන නොවන්නා වූ x හි පරාසය ලියන්න.

70. $x^4 + x^2 + x + 1 \equiv (x^2 + A)(x^2 - 1) + Bx + C$ සර්ව සාම්‍යය සත්‍ය කරන්නා වූ A, B, C අගයන් සොයන්න. එය භාවිතයෙන් 100010101 යන්න 9999 න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය සොයන්න.

71. $f(x)$ බහුපදය $(x-1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 2 වන අතර, $(x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 3 වේ. $f(x)$ යන්න $(x-1)(x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

72. $f(x)$ බහුපදය 3 වන මාත්‍රයේ බහු පදයක් වන අතර, x^3 හි සංගුණකය බව දී ඇත. −1 යනු $f(x) = 0$ සමීකරණයේ මූලයක් නම්, $f(x)$ බහුපදය සොයා, $f(x) = 0$ සමීකරණයට වෙනත් තාත්වික මූල නොමැති බව පෙන්වන්න. $x^2 - x + 2$ න් බෙදූ විට $(5x - 7)$ ක ශේෂයක් ද, $x^2 + x - 1$ න් බෙදූ විට $(12x - 1)$ ක ශේෂයක් ද ලැබෙන පරිදි වූ x හි තුන්වන මාත්‍රයේ බහුපදය සොයන්න.

73. (i) ශේෂ ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1 x + a_0$ යන බහුපද ශ්‍රිතය $x^2 - h^2$ න් බෙදූ විට ශේෂය
$\frac{1}{2}[f(h) - f(h)]x + \frac{1}{2}[f(h) - f(h)]$ බව පෙන්වන්න.

(ii) සාධක ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.
$f(x)=x^3-x^2+ax+b$ බහුපද ශ්‍රිතයකි. $(x+1)$ සාධකයක් වන අතර, $f(x)$ බහුපදය $(x-1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය -8 වේ. a හා b නියත සොයන්න. ප්‍රකාශනයේ සම්පූර්ණ සාධක සොයන්න.

$\dfrac{6x^3+5x^2-7}{3x^2+2x}$ භින්න භාග වලට වෙන් කරන්න.

74. ශේෂ ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.
$f(x)=2x^4+3x^3+ax^2+bx+c$ බහුපදය $(x-2)(x+3)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $-5x+2$ වේ. $6a=-64-c=6b$ බව පෙන්වන්න. එම බහුපදය $(x-1)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය a පමණක් ඇසුරෙන් සොයන්න.

75. $ax^3-2x^3+x^2+b\equiv(x^2-1)f(x)-x-2$ බව දී ඇත. මෙහි a හා b නියත ද, $f(x)$ බහු පදයක් ද වේ. a හා b අගයන්න. $f(x)$ බහුපදය $x+2$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

76. $(x+y)^3$ ප්‍රසාරණය කරන්න. එනයින් $x^3+y^3+z^3-3xyz$ සාධකවලට වෙන් කරන්න.
$(a-b)^3\ (b-c)^3\ (c-a)^3$
$(a+b)^3\ (a-b)^3+(b+c)^3\ (b-c)^3+(c+a)^3\ (c-a)^3$
ප්‍රකාශනවල සාධක වෙන් කිරීමට ඉහත ප්‍රතිඵල භාවිතා කරන්න. $k\ (\neq 1)$ නියතයක් විට $k(x+2)^2-(x-1)(x-2)$ නම් ප්‍රකාශය x හි එක් අගයක් සඳහා පමණක් ශූන්‍ය වේ නම්, k හි අගය සොයන්න. එය අවම අගයක් ගන්නේ නම්, k හි නිඛිල ප්‍රභූ පරාසය සොයන්න.

77. (i) $P(x)$ බහුපදය $(x-1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 2 වන අතර, $(x-2)$ බෙදූ විට ශේෂය 3 වේ. $P(x)$ $(x-1)(x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය $ax+b$ වේ. a, b සොයන්න. තවද $P(x)$ බහුපදය 3 මාත්‍රයේ වන අතර, x^3 හි සංගුණකය 1 බව දී ඇත. -1 යනු $P(x)=0$ සමීකරණයේ මූලයක් ද නම්, $P(x)$ බහුපදය සොයා, $P(x)=0$ සමීකරණයට වෙනත් තාත්වික මූල නැති බව පෙන්වන්න.
(ii) $(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3$ සාධක සොයන්න.

78. x^3+px^2+q හා ax^2+bx+c යන දෙකට $x+1$ පොදු සාධකයක් නම් එය $apx^2-bx+aq-c$ හි ද සාධකයක් වන බව පෙන්වන්න. $x^3+\sqrt{7}x^2-14\sqrt{7}$ හා $2x^2-13x-\sqrt{7}$ යන බහුපද දෙකට පොදු සාධකයක් ඇති බව පෙන්වන්න. $2x^2-13x-\sqrt{7}=0$ සමීකරණය විසඳන්න.

79. $f(x)=3x^3-4x^2-5x+2$ ප්‍රකාශනය ඒකජ සාධක 3 ක ගුණිතයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න. එනයින් $3e^{3x}-4e^{2x}-5e^{x}+2=0,\quad x\in\mathbb{R}$ සමීකරණයේ විසඳුම් සොයන්න.

80. $f(x)$ ශ්‍රිතයට පුනරාවර්තන සාධකයක් ඇත්නම්, එම සාධකය $f^1(x)$ වල සාධකයක් බව පෙන්වන්න. x^3-5x^2+7, $(x-1)^2$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

81. $[x-(P+Q)]$ යනු $x^3-3PQx-(P^3+Q^3)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.
එනයින් $x^3-6x-6=0$ හි තාත්වික මූලයක් සොයන්න.

82. x^2+2 යනු x^4-6x^2+p හි සාධකයකි. p නියතය සොයන්න. එනයින් x^4-6x^2+p හි සාධක සොයන්න.

83. m, n නිඛිලව තිබියදී x^m+nx, x^2-x-2 වලින් බෙදෙන විට ලැබෙන ශේෂය $2x+6$ නම් m, n සොයන්න.

පසුගිය විභාග ගැටළු

84. c හා d තාත්වික සංඛ්‍යා වේ. $(c\neq 0)$
$f(x)=x^3+4x^2+cx+d$ වේ. $(x+2)$ මගින් $f(x)$ බෙදූවිට ශේෂය $-c^3$ වේ. තවද $(x-2)$ යනු $f(x)$ හි සාධකයක් වේ. $c=-2$ සහ $d=-12$ බව පෙන්වන්න.

[2018 A/L]

85. $g(x)=x^3+px^2+qx+1$ යැයි ගනිමු. මෙහි $p, q\in\mathbb{R}$ වේ. $(x-1)(x+2)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $3x+2$ වේ. $(x-1)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය 5 බව හා $(x+2)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය -4 බව පෙන්වන්න. p හා q හි අගයන් සොයා $(x+1)$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න. *[2017 A/L]*

86. $p(x)=x^3+2x^2+3x-1$ හා $q(x)=x^2+3x+6$ යැයි ගනිමු. ශේෂ ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්, $p(x)$ යන්න $(x-1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂයත්, $q(x)$ යන්න $(x-2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂයත් සොයන්න. $p(x)=(x-1)q(x)+5$ බව සත්‍යාපනය කර, $p(x)$ යන්න $(x-1)(x-2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න. *[2016 A/L]*

87. (i) $f(x)=2x^4+\gamma x^3+\delta x+1$ යැයි ගනිමු. මෙහි γ හා δ තාත්වික නියත වේ.
$f(-\frac{1}{2})=0$ හා $f(-2)=21$ බව දී ඇති විට, $f(x)$ හි තාත්වික ඒකජ සාධක දෙක සොයන්න.

(ii) සියලුම තාත්වික x සඳහා $(x^2+x+1)p(x)+(x^2-1)Q(x)=3x$ සමීකරණය සපුරාලන $P(x)$ හා $Q(x)$ ඒකජ ප්‍රකාශන දෙක සොයන්න. *[2015 A/L]*

88. $a \in R$ යැයි ද $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + ax - 1$ යැයි ද ගනිමු. $(3x-1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බව දී ඇත. a හි අගය සොයන්න. $f(x)$ යන්න $(3x-1)(x+k)^2$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි k යනු නියතයකි. ඉහත ප්‍රකාශනයෙහි $3x-1$ යන්න b හා c නියත වන $b(x+1)+c$ ආකාරයට ලිවීමෙන් $f(x)$ යන්න $(x+1)^3$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න. [2014 A/L]

89. $f(x) = ax^3 + bx^2 - 11x + 6$ යැයි ගනිමු. මෙහි $a, b \in R$ වේ. $(x-1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් වේ නම් හා $f(x)$ යන්න $(x-4)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය -6 නම් a හා b වල අගයන් සොයන්න. $f(x)$ හි අනෙක් ඒකජ සාධක දෙකත් සොයන්න. [2013 A/L]

90. $g(x) = x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 2$ යැයි ගනිමු. ශේෂ ප්‍රමේයය භාවිත භාවිත නොදා ගනිමින් $(x+1)^2$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න. $g(x)$ යන්න $(x-a)^2(x^2+bx+c)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි a, b හා c යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ. x හි සියලු තාත්ත්වික අගයන් සඳහා $g(x) \ge 0$ බව අපෝහනය කරන්න. [2012 A/L]

91. $f(x) = x^3 - 3abx - ax - (a^3+b^3)$ යැයි ගනිමු. a හා b තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. $(x-a-b)$ යනු $f(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න. $f(x)$ හි අනෙක් සාධකය වර්ගජ ආකාරයෙන් සොයන්න. එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ a හා b ප්‍රභින්න නම් $f(x) = 0$ ට තාත්ත්වික මූල එකක් පමණක් තිබෙන බව පෙන්වන්න. $x^3 - 9x - 12 = 0$ ට තාත්ත්වික මූල එකක් පමණක් තිබෙන බව අපෝහනය කර එය සොයන්න. [2011 A/L]

92. $f(x)$ බහුපදය $x - \alpha$ වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $f(\alpha)$ බව පෙන්වන්න. $f(x)$ බහුපදය $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $A(x-\beta)(x-\gamma) + B(x-\alpha)(x-\gamma) + C(x-\alpha)(x-\beta)$ ආකාරය ගනී. මෙහි α, β හා γ සමාන නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. $\alpha, \beta, \gamma, f(\alpha), f(\beta)$ සහ $f(\gamma)$ ඇසුරෙන් A, B, C නියත ප්‍රකාශ කරන්න. එනයින්, $x^5 - kx$ යන්න $(x+1)(x-1)(x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂයේ x හි පදය අඩංගු නොවන ලෙස k නියතයේ අගය සොයන්න. [2009 A/L]

93. $f(x)$ බහුපදය $(x-\alpha)$ වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $f(\alpha)$ බව පෙන්වන්න. $f(x)$ බහුපදය $(x-\alpha)(x-\beta)$ වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $Ax + B$ ආකාරය ගනී. මෙහි $\alpha \ne \beta$ වේ. α, β $f(\alpha)$ සහ $f(\beta)$ ඇසුරෙන් A හා B නියත ප්‍රකාශ කරන්න. එනයින්, $x^3 + kx^2 + k$ යන්න $(x-1)(x+2)$ න් බෙදූ විට ශේෂයේ නියත පදය අඩංගු නොවන ලෙස k නියතයේ අගය සොයන්න. [2008 A/L]

94. $f(x)$ යනු මාත්‍රය 3 ට වැඩි x හි බහු පදයකි. පිළිවෙළින් $(x-1)$, $(x-2)$ හා $(x-3)$ යන්නෙන් $f(x)$ බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය a, b හා c වේ. ශේෂ ප්‍රමේයය භාවිත භාවිත යෙදීමෙන් $(x-1)(x-2)(x-3)$ යන්නෙන් $f(x)$ බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය, $\lambda(x-1)(x-2) + \mu(x-1) + 2$ ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි λ, μ හා x යනු නියත වේ. a, b හා c ඇසුරෙන් λ, μ හා x සොයන්න. [2007 A/L]

95. $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$ සාධක සොයන්න. [2006 A/L]

96. $P(x) = ax^2 + bx + c$ යන්න $(x+1)$ න්, $(x-1)$ න් හා $(x-2)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂ පිළිවෙළින් 4, 0 හා 4 වේ. a, b, c හි අගයන් සොයා P(x) හි ඒකජ සාධක සියල්ල නිර්ණය කරන්න. [2005 A/L]

97. P(x) වර්ගජ බහුපදයක් පිළිවෙළින් $(x-1)$, $(x-2)$ හා $(x-3)$ යන්නෙන් බෙදූ විට ශේෂයන් $1, \frac{1}{2}$ හා $\frac{1}{3}$ වේ. $(x-1)$, $(x-2)$ හා $(x-3)$ යනු $Q(x) = xP(x) - 1$ මගින් දෙනු ලබන Q(x) බහුපදයේ සාධක බව පෙන්වන්න. ඒ නයින් Q(x) සොයන්න. [2004 A/L]

98. $f(x, y) = 2x^2 + \lambda xy + 3y^2 - 5y - 2$ ප්‍රකාශනය ඒකජ සාධක දෙකක ගුණිතයක් ලෙස ලිවිය හැකි λ හි අගයන් සොයන්න. [2000A/L]

99. $x(y^4 - z^4) + y(z^4 - x^4) + z(x^4 - y^4)$ හි සාධක සොයන්න. [1999 A/L]

100. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ හි සාධක සොයන්න. ප්‍රභින්න p, q, r සඳහා $x^3 + y^3 + z^3 = 3(p-q)(q-r)(r-p)$ සහ $px + qy + rz = 0$ ද $x + y + z = 0$ නම්, $x = q - r$, $y = r - p$ සහ $x = p - q$ බව පෙන්වන්න. [1998 A/L]

101. (a) $f(a, b, c) = (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ හි සාධක සොයන්න. $f(a, b, k)$ යන්න $(a+b+c)^{1997} - a^{1997} - b^{1997} - c^{1997}$ හි සාධකයක් බව අපෝහනය කරන්න.

(b) $f(x)$ බහුපද ශ්‍රිතයක් වේ. $f(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

(i) $x - 1$ හෝ $x + 1$ $f(x)$ හි සාධකයක් නොවන බව පෙන්වන්න.

(ii) $f(x)$, $x^2 - 1$ බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(iii) $f(x)$, $x^2 + 1$ න් බෙදූ විට ශේෂය 2 බව පෙන්වා, එමගින් $f(x) = 2$ හි එක් තාත්ත්වික මූලයක් සොයන්න. [1997 A/L]

102. (i) $(b+c)^3(b-c) + (c+a)^3(c-a) + (a+b)^3(a-b)$ සාධක සොයන්න.

(ii) p, q, r $(p \ne 0)$ යනු තාත්ත්වික නියත විට $px^4 + qx^3 + rx^2 - qx + p = 0$ සමීකරණය y හි වර්ගජ සමීකරණයට ඌනනය කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි $y = x -$ වේ. එනයින් ඉහත දක්වා ඇති සමීකරණයට තාත්ත්වික මූල තිබීම සඳහා p, q, r මගින් තෘප්ත විය යුතු අවශ්‍යතාවයක් සොයන්න.
$(x-2)$ [1996 A/L]

103. (i) $t = x + \frac{1}{x}$ යැයි ලියමින් $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ යන සමීකරණයේ මූල සියල්ලම සොයන්න.

(ii) $E = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x + 7 = 0$ යයි ගනිමු. $y^2 + y + a$ ආකාරයෙන් E ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි a නියතයක් ද, y යන්න b හා c නියත වන $x^2 + bx + c$ ආකාරයෙන් ද වේ. එනයින් සියලු තාත්වික x සඳහා $E > 3$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $\frac{1}{(x-2)(x-1)^3} = \frac{k}{x-2} + \frac{f(x)}{(x-1)^3}$ වන සේ k නියතයක් සහ x හි ශ්‍රිතයක් වන f සොයන්න. $x - 1$ හි බලවලින් ලෙස $f(x)$ ප්‍රකාශ කරන්න. එනයින්

හි භින්න භාග සොයන්න.

[1992 A/L]

104. විචල සාධක දෙකක් ගුණ කිරීමෙන් $(a - x)^4 + (x - 1)^4 - (a - 1)^4$ ප්‍රකාශනයේ සාධක සොයන්න. [1993 A/L]

105. (i) $f(x, y, z) = x^4(y - z) + y^4(z - x) - z^4(x - y)$ හි සාධකයක් $(x - y)$ බව පෙන්වන්න. එනයින් ප්‍රකාශනය පූර්ණ ලෙස සාධකවලට වෙන්කරන්න. x, y, z යනු එකිනෙකට වෙනස් තාත්වික සංඛ්‍යා නම් $f(x, y, z)$ ශුන්‍ය විය නොහැකි බව අපෝහනය කරන්න.

(ii) $ax^3 + bx + c$ ප්‍රකාශනයට $x^2 + k + 1$ ආකාරයේ සාධකයක් ඇත්නම් $a^2 - c^2 = ab$ බව පෙන්වන්න. මෙම අවස්ථාවේදී $ax + bx + c$ සහ $cx^3 + bx^2 + a$ ප්‍රකාශනවලට පොදු වර්ගජ සාධකයක් තිබෙන බව අපෝහනය කරන්න. [1991 A/L]

106. (i) $f(x) = x^4 - bx^3 - 11x^2 + 4(b + 1)x + a$, මෙහි a සහ b නියත වේ.

I. $f(x)$ වර්ග ප්‍රකාශනයක පරිපූර්ණ වර්ගයක් බව ද

II. $x + 2$ යනු $f(x)$ හි සාධකයක් බව ද දී ඇත. a සහ b සොයා $f(x)$ හි සාධක සියල්ල සොයන්න.

(ii) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ හි සාධක සොයන්න. ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $(a + b + c)^3 - (b + c - a)^3(c + a - b)^3 - (a + b - c)^3 = 24abc$ බව සාධනය කරන්න.

[1990 A/L]

107. (i) $f(x) = 2x^4 + (3k - 4)x^3 + (2k^2 - 5k - 5)x^2 + (2k^3 - 2k^2 - 3k - 6)x + 6$ හි $x^2 - k$ සාධකයක් වන පරිදි k හි අගයන් සොයන්න. k හි එක් එක් අගයට අනුරූප $f(x)$ හි ඉතිරි සාධක සොයන්න.

(ii) $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy = \frac{1}{2}[(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2]$ බව පෙන්වන්න.

$x = b + c - a, y = c + a - b, z = a + b$ නම් $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$ බව අපෝහනය කරන්න. [1989 A/L]

108. $f(x, y, z) = x(y^4 - z^4) + y(z^4 - x^4) + z(x^4 - y^4)$ යයි ගනිමු. $(x - y)(y - z)$ සහ $(z - x)$ යනු $f(x, y, z)$ සාධක බව පෙන්වන්න. එනයින් $f(x, y, z)$ සාධකවලට වෙන් කරන්න.

[1986 A/L]

109. (i) $f(x, y, z) = (x + y + z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$ යයි ගනිමු. $(x + y), (y + z), (z + x)$ යනු $f(x, y, z)$ හි සාධක බව පෙන්වන්න. එනයින් $f(x, y, z)$ සාධකවලට වෙන් කරන්න.

(ii) $(x^2 - px + 1)$ යනු $ax^3 + bx^2 + c$ හි සාධකයක් නම්, එවිට, $(a^2 - c^2)(a^2 - c^2 + bc) = a^2b^2$ බව සාධනය කරන්න. මෙම අවස්ථාවට අනුරූපව නම් එවිට, $(x^2 + px + 1)$ යන්න $cx^5 + bx^3 + a$ හි සාධකයක් ද බව පෙන්වන්න.

[1985 A/L]

110. (i) $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a)$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $f(x) = px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$ වේ. $x^2 + \alpha$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $(s - q\alpha)x + p\alpha^2 - r\alpha + t$ බව පෙන්වන්න. α සහ $-\alpha$ යනු $f(x) = 0$ හි මූල නම් $ps^2 - qrs + q^2t = 0$ සම්බන්ධය p, q, r, s, t මගින් සපුරාලන බව සාධනය කරන්න.

[1984 A/L]

111. $x^2 + 1$ න් පරිපූර්ණ ලෙස බෙදෙන එහෙත් $(x - 1)^2(x - 2)$ න් බෙදූ විට $6x + 8$ ක ශේෂයක් ඉතිරිවන x හි සිව්වන මාත්‍රයේ බහුපදය සොයන්න. [1983 A/L]

112. (i) $(x + y)^2(x + z)^2(y - z) + (y + z)^2(y + x)^2(z - x) + (z + x)^2(z + y)^2(x - y)$ යන්න තාත්වික රේඛීය සාධක තුනකට සහ වර්ගජ සාධක එකකට සාධක කරන්න.

(ii) $x^8 + 2x^7 + ax^2 + bx + c$ ප්‍රකාශනය $x^2 + x - 2$ යන්නෙන් පරිපූර්ණ බෙදිය හැක. ප්‍රකාශනය $x + 1$ යන්නෙන් බෙදූ විට -8 ක ශේෂයක් ඉතිරි වේ. a, b, c සොයන්න.

[1966 A/L]

113. (i) $2x^4 + x^3 - x^2 + ax + b$ යන්න $x^2 - 1$ න් බෙදූ විට ශේෂය $2x + 3$ වේ. a හා b වල අගයන් සොයන්න.

(ii) $(x, y, z) = (y - z)^5 + (z - x)^5 + (x - y)^5$ සරල සාධක තුනක් සහ වර්ගජ සාධක එකක් ද වන සේ සාධක සොයන්න. [1964 A/L]